גדל והייזנברג נפגשים בבר

סיפורה של המעגליות

רון אהרוני

גדל והייזנברג נפגשים בבר

רון אהרוני

תוכן העניינים

שלושה פרקי היכרות 11

חתולים וזנבות 13

שתי הפנים של המעגליות 15

פגישה בבר 17

חלק ראשון : פרדוקסים 19

סתירות מועילות 21

תנינים ועורכי דין 24

אֶפִּימֶנִידֶס והתעויוט 26

פרדוקס שימושי מאוד 30

השקרנים של סמליאן 32

בּוּרִידָן ופילים ורודים 34

אַנְסֶלְם והראיה האונטולוגית 36

בֶּרִי והמספר שאינו מוגדר בזאת 38

פרדוקס בחינת הפתע 41

חלק שני : אינסופים גדולים ואינסופים גדולים יותר.BOOKMARK NOT DEFINED

תחום נולד ....ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED

מה פירוש "למנות" ....ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED

כנגד האינטואיציה..........ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED

קנטור משחק בראש תפוד **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

הפרדוקסים של תורת הקבוצות.**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

העולם חוזר לתיקונו ....**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

חלק שלישי: פרדוקס חופש הרצון.**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

אי הנחת הפילוסופי.........**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

רצון חופשי מול היקבעות..**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

טיעון הבטלן ....**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

הבטלן, מבפנים ומן הצד ...**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

פרדוקס ניוקום...............**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

מדוע פרדוקס ניוקום וטיעון הבטלן חד הם.**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

חתול וזנב: לבחור את הבחירה.**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

מסלול עוקף שיקול ....**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

הכל צפוי (מבחוץ) והרשות נתונה (מבפנים).**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

חלק רביעי: הלוגיקה מתעוררת.**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

מהפכות קופרניקאיות......**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

מה זו "מתמטיקה" ....**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

בּוּל................................**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

פְּרֶגֶה ....**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

ראסל, ויטהֶד ומשפט השלמות של גדל.**ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**

פֶּאָנוֹ .... Error! Bookmark not defined.
הפרוגרמה של הילברט .... Error! Bookmark not defined.
התפכחות .... Error! Bookmark not defined.
הפרדוקס של גדל .... Error! Bookmark not defined.
מפרדוקס למשפט .... Error! Bookmark not defined.
מערכות סבירות של אקסיומות.Error! Bookmark not defined.
מערכת אקסיומות כמעט מושלמת ופתרון בעיית ההחלטה.KMARK NOT DEFINED.
אלגוריתמים .... Error! Bookmark not defined.
המהפכה הקופרניקאית של אלן טיורינג.Error! Bookmark not defined.
החדר הסיני של ג'ון סרל .. Error! Bookmark not defined.
המהפכה שלא הסתיימה .. Error! Bookmark not defined.
מסקנות פילוסופיות .... Error! Bookmark not defined.
אישיות וגאוניות .... Error! Bookmark not defined.
חלק חמישי : פרדוקס הגוף-נפש.Error! Bookmark not defined.
פגישה של בלתי נפגשים .... Error! Bookmark not defined.
רייל מבקר באוניברסיטה.. Error! Bookmark not defined.
עולם פרטי .... Error! Bookmark not defined.
עגבניות וכתמים על רשתיות.Error! Bookmark not defined.
סוקרטס מסביר את המעגליות.Error! Bookmark not defined.

הכרה ישירה .... Error! Bookmark not defined.
אני חושב משמע אני קיים Error! Bookmark not defined.
חלק שישי : עקרון אי הוודאות Error! Bookmark not defined.
כשניבוי ובחירה נפגשים... Error! Bookmark not defined.
ניבויים ומדידות .... Error! Bookmark not defined.
כמה מושגים בסיסיים על גלים Error! Bookmark not defined.
גל או חלקיק .... Error! Bookmark not defined.
האפקט הפוטו-אלקטרי... Error! Bookmark not defined.
נצחונה של נוסחה מתמטית Error! Bookmark not defined.
תופעות בדידות ורציפות .. Error! Bookmark not defined.
מודל האטום של בוהר ...... Error! Bookmark not defined.
ניסוי שטרן-גֶרְלָך .... Error! Bookmark not defined.
חלקיקים מתאבכים........ Error! Bookmark not defined.
מכאניקת הקוואנטים ...... Error! Bookmark not defined.
פונקציות עצמיות ומדידות Error! Bookmark not defined.
יחסי אי וודאות .... Error! Bookmark not defined.
משמעות עקרון אי הוודאות במונחים של פונקצית הגל Bookmark not defined.
הניסוי של פיינמן .... Error! Bookmark not defined.
מוצא אפשרי מפרדוקס קלאסי Error! Bookmark not defined.

חלק שביעי: מדוע זה מצחיק **Error! Bookmark not defined.**
מרדף אחרי הגדרה .... **Error! Bookmark not defined.**
ניתוק של כוונה .... **Error! Bookmark not defined.**
שנים עשר סוגים של ניתוק משמעות **Error! Bookmark not defined.**
נצחונו של הסמל .... **Error! Bookmark not defined.**
טעינה במשמעות .... **Error! Bookmark not defined.**
בדיחות אתניות .... **Error! Bookmark not defined.**
סמל הופך למושא של עצמו **Error! Bookmark not defined.**
פרק סיום :כלא האישיות .. **Error! Bookmark not defined.**
נספח א': הוכחת האלכסון של קנטור **Error! Bookmark not defined.**
נספח ב': פרדוקס רישאר .. **Error! Bookmark not defined.**
נספח ג': קבוצת החזקה של המספרים הטבעיים **or! Bookmark not defined.**
נספח ד': מדוע אין נוסח פורמלי לפרדוקס גדל **ror! Bookmark not defined.**
נספח ה': מדוע בעיית העצירה אינה פתירה **Error! Bookmark not defined.**
נספח ו': פרדוקס הערימה **Error! Bookmark not defined.**
נספח ז': פונקציות לא רקורסיביות **Error! Bookmark not defined.**
מילון למונחים פיזיקליים **Error! Bookmark not defined.**
ביבליוגרפיה .... **Error! Bookmark not defined.**

שלושה פרקי היכרות

הַתְּפִלּוֹת יָצְרוּ אֶת הָאֱלֹהִים,

הָאֱלֹהִים יָצַר אֶת הָאָדָם

וְהָאָדָם יוֹצֵר תְּפִלּוֹת

שֶׁיּוֹצְרוֹת אֶת הָאֱלֹהִים שֶׁיּוֹצֵר אֶת הָאָדָם.

(״אלים מתחלפים, תפילות נשארות לעד״, מתוך *פתוח סגור פתוח*, יהודה עמיחי)

חתולים וזנבות

בתי הקטנה חזרה יום אחד מביקור אצל רופא שיניים, והסבירה לי: אתה יודע איך עושים שזריקת ההרדמה לא תכאיב? צריך לתת לפניה זריקת הרדמה. כמובן, כדי שהזריקה הזאת לא תכאיב, נחוץ להקדים גם לה זריקה.

משעשע? אכן. אבל לרעיון הזה, הקליל לכאורה, יש גם פנים רציניות. קוראים לו "מעגליות", או "התייחסות עצמית". סיפור זריקת ההרדמה הוא דוגמה למטלה מוגדרת מעגלית, כלומר משימה שהגדרתה מניחה שהיא כבר בוצעה. דוגמה מפורסמת אחרת היא העצה שנותנים למי שנפל לבור – רוץ, הבא סולם, ותוכל לצאת. כפי שאתם יכולים להיווכח משתי הדוגמאות האלה, ניסיון לבצע מטלה מסוג זה, שהגדרתה מפנה לעצמה, עלול להכניס למעגל חסר מוצא.

חתול שרודף אחר זנבו, מי שזקוק למשקפיים כדי למצוא את משקפיו שאיבד, מי שנדחה בחיפוש עבודה ראשונה מפאת חוסר ניסיון בעבודה, הברון מינכהאוזן שמרים את עצמו במשיכה בשערות ראשו, ארכימדס המחפש נקודת משען כדי להרים את כדור הארץ כולו – כל אלה מנסים לבצע משימות מעגליות. ברוב המקרים המעגליות מהווה מכשול לביצוע המטלה. הפקודה "חייך!" שמצווה עלינו הצלם גורמת בדרך כלל לאפקט ההפוך. סקרים שמפורסמים לפני בחירות עשויים לטרוף את הקלפים ולגרום לתוצאה מנוגדת למה שהם עצמם ניבאו. מי שמנסה להשיג כרטיס אשראי באמריקה נכנס למעגל קסמים: כדי לקבל כרטיס אשראי עליו לספק תחילה הוכחות לעמידה בתשלום חובות, שפירושו הכמעט יחיד הוא בעלות על כרטיס אשראי. ב"מלכוד 22" של ג'וזף הלר יכולים הטייסים, גיבורי הספר, להשתחרר ממשימות הפצצה אם יוכיחו אי שפיות, אבל סעיף 22 בספר החוקים אומר שבקשה להשתחרר היא סימן לשפיות. השאלה "האם תשיב לשאלה זו בשלילה?" מטילה על השומע משימה לא ניתנת לביצוע, משום שאם ישיב "כן" טעה – הוא לא השיב בשלילה, ואם ישיב "לא" גם אז טעה, כי הוא דווקא כן השיב בשלילה.

חלק מן המצבים האלה מתסכלים, חלקם מעוררים התפעלות מן התחכום שבהם, וכמעט כולם מעלים על פנינו חיוך. אבל נדמה שאין טעם להקדיש להם מחשבה יתרה. הם נראים כקוריוזים, לכל היותר מקור לחידות קנטרניות ולשעשועי חשיבה.

הסתובבות סביב עצמך במעגל היא עניין לחתולים, או לילדים, לא לאנשים רציניים. אלא שבנקודה זו מזומנת לנו הפתעה: ההפך הגמור הוא הנכון. המעגליות ממלאת תפקיד משמעותי בכמה וכמה תחומי מדע. במשך כשלושת רבעי מאה, בין 1875 ו-1950, הייתה רדיפת זנבות מקור לתגליות מדעיות משמעותיות ביותר.

אבהיר מייד: בעלי התגליות האלה לא רדפו בעצמם אחרי זנבם. להפך, הם פסעו מחוץ למעגל, התבוננו בחתולים מוכי סחרחורת, והסבירו מדוע לעולם לא יתפסו את זנבם. לכך יש חשיבות רבה: להבין שמשהו אינו אפשרי הוא עניין משמעותי. לא רק בגלל הזמן והמאמץ שהדבר יכול לחסוך לחתולים, אלא גם בגלל מסקנות שיש לכך בנוגע למגבלות הידע האנושי.

קורותיהם של רעיונות מסעירים לפעמים לא פחות מאלה של בני אדם. סיפור המעגליות רצוף בתגליות מפתיעות, בצד פרדוקסים שהוגים מטיחים כנגדם את ראשיהם כבר אלפי שנים; בתובנות עמוקות, אל מול פחים שחכמים וטובים נפלו בהם. הוא החל בימי היוונים הקדמונים, לא נקטע גם באפלה המדעית של ימי הביניים, והגיע לשיאו במחצית הראשונה של המאה העשרים. הסיפור הזה ראוי שיסופר, וזאת אני רוצה לעשות בספר הזה.

שתי הפנים של המעגליות

מה שהופך את המעגליות למרתקת כל כך הוא בעיקר תכונה אחת: חמקמקות. פשוט, איננו רגילים בה. המוח שלנו מכוון להסתכל בעולם, לא בעצמו, בוודאי לא במחשבה הנוכחית שמעסיקה אותו. משום כך קשה לזהות מצבים שבהם החשיבה מוסבת על עצמה או משפיעה על עצמה. לקושי הזה יש שני אפקטים. מצד אחד, הוא תורם לעומקן של תופעות המעגליות, ועושה את חשיפתן למאירת עיניים. מצד שני, משמעותו היא גם שקל מאוד ליפול ברשתה של המעגליות. מי שאינו זהיר דיו עלול באמת להסתובב סביב זנבו. לא נדיר הוא שאנשים מניחים את תקפותו של מבנה מושגים מעגלי, ואחר כך מנסים נואשות להתיר את פקעת החוטים שהם עצמם סיבכו. כדי לעשות זאת עליהם לצאת מן המעגל ולהסתכל בו מבחוץ, הצרה היא שהדרך החוצה לא תמיד ברורה. למעגליות יש אם כן גם פן אפל, אפילו מרושע. למי שלוקח על עצמו לספר את קורותיה יש בכך דווקא יתרון, שהרי סיפור עם רשע הוא תמיד מעניין.

חלקי הספר יוקדשו לסירוגין לשתי הפנים האלה של המעגליות, המוארת והאפלה, המועילה והחתרנית. החלקים האיזוגיים (פרט לאחרון) עוסקים בצד פורע הסדר, זה שמבלבל על אנשים את דעתם, ואילו בחלקים הזוגיים מסופר על הפן מאיר העיניים, זה שמקדם את הבנת היחס בין העולם לבין הידיעה עליו. חלקו של הצד החיובי, המשתקף בתגליות מדעיות, יהיה גדול יותר. הוא ייפתח, בחלקו השני של הספר, בתגליתו של גיאורג קנטור, בדבר קיום סוגים שונים של אינסוף. עובדה מפתיעה היא שלא כל האינסופים שווים - יש ביניהם גדולים, ויש גדולים יותר. עוד יותר מגילוי העובדה הזאת עצמה, הייתה חשובה ההוכחה שלה, שהשתמשה ברעיון מעגלי. לרעיון הזה הייתה השפעה בהרבה הקשרים, והוא חזר והופיע פעמים רבות במתמטיקה של המאה העשרים. בחלק הרביעי אספר על פריצת דרך מתמטית אחרת, תחום חדש שפותח לקראת סוף המאה התשע עשרה. זוהי הגירסה המודרנית (לאחר גירסה עתיקה, יוונית) של הלוגיקה המתמטית, שעניינה הוא העשייה המתמטית. כי אכן, יש דבר כזה, מתמטיקה של המתמטיקה – אפשר לחקור בדרך מתמטית את החשיבה המתמטית. זוהי תופעת מעגליות בפני עצמה, אולם המעגליות שאני רוצה לספר לכם עליה בחלק זה של הספר היא אחרת – תגליותיהם של קורט גדל ושל אלן טיורינג, ללא ספק נצחונה המזהיר ביותר של

המעגליות מאז ומעולם. בערך באותה תקופה שבה גילו גדל וטיורינג את המעגליות בלוגיקה, ולפחות על פני השטח ללא כל קשר, גילה ורנר הייזנברג תופעת מעגליות עמוקה אחרת, בתורת הקוואנטים. זהו "עקרון אי הוודאות" המפורסם, שבאחד מפירושיו הוא מדבר על השפעת המדידה על הנמדד. על העיקרון הזה, ועל תופעות נוספות בתורת הקוואנטים של השפעת הצופה על הנצפה, אספר בחלק השישי של הספר.

בחלקים האיזוגיים יסופר כאמור על כשרונה של המעגליות לתעתע, ועל המהומה שמתחוללת כאשר היא מצליחה לעשות זאת. כאשר נופלים בפח, ומאמינים שמשימה מעגלית כלשהי ניתנת לביצוע, מגיעים לאבסורדים, כלומר למסקנות בלתי אפשריות. מסקנות כאלה נקראות "פרדוקסים", ושלושת החלקים המדוברים יעסקו בפרדוקסים. החלק הראשון עוסק בפרדוקסים שנקראים "לוגיים", כלומר סתירות כביכול שמתגלות בהיגיון. נושאיהם של החלק השלישי והחמישי הם פרדוקסים שמגיעים מן הפילוסופיה. בחלק השלישי יסופר על פרדוקס חופש הרצון, ובחלק החמישי על פרדוקס הגוף-נפש. אעיר כבר כאן שהפרקים על הפילוסופיה אינם פילוסופיים בעצמם. הם מתארים, על דרך ההתבוננות, את מה שקורה לפילוסוף כאשר הוא מסתבך (כך אנסה להראות) בבעיה מעגלית.

החלק השביעי, האחרון, הוא יוצא הדופן בין השבעה. אני חוזר בו אל מה שפתחתי בו את פרק ההקדמה הראשון – ההומור. למעשה, ההומור ילווה את הספר כולו, בבדיחות שייזרעו בין הפרקים. אבל הסבר תפקידו של ההומור בספר דורש פרק הקדמה נפרד.

מה כתוב במילון תחת הערך 'מעגליות'?

"עיין ערך 'מעגליות'."

פגישה בבר

כאמור, למעגליות יש פן נוסף, רציני ביותר: ההומור. הרבה מאוד בדיחות ומצבים משעשעים בנויים על עקרון ההתייחסות העצמית. משום כך גדל והייזנברג ייפגשו בספר זה (גם) בבר, ויספרו בדיחות.

המשותף לבדיחות שמבוססות על מעגליות הוא שרעיון הופך למושא של עצמו. חץ שנדמה שהוא מכוון אל משהו בעולם מתגלה לפתע כמכוון אליו עצמו.

יש שלושה סוגי אנשים בעולם, אלה שיודעים לספור ואלה שלא.

פעם חשבתי שאני לא החלטי, אבל עכשיו אני כבר לא כל כך בטוח.

יש שהשומע של הבדיחה הופך לפתע לחלק ממנה:

כדי להתקבל לקו קלוקס קלאן אתה צריך להרוג כושי וכלב. – למה כלב? – התקבלת.

בבדיחה הבאה תוצאתה של בחירה מתגלה כרלבנטית לבחירה עצמה:

שלושה חברים יושבים בבר, ולפתע מופיעה פיה ומציעה לאחד מהם לבחור בין שלוש משאלות: יופי, חוכמה או מיליון דולר. הוא חושב, חושב, ולבסוף בוחר בחוכמה. הפיה מניפה את המטה שלה, עושה "טינג", ולפתע רואים חבריו של הבחור שפניו נופלות. "מה קרה?" הם שואלים. "הייתי צריך לבחור במיליון הדולר", הוא אומר.

לפעמים הבדיחה הופכת לגיבורה שלה עצמה:

היה היו שתי בדיחות. האחת חלתה. השנייה ישבה לידה, סעדה אותה, הכינה לה מרק ושעשעה אותה. נכון בדיחה טובה?

יש כאן משחק בשתי משמעויות של "טובה". אבל העיקר הוא ההתייחסות העצמית: מתברר שהמילה "בדיחה" מתייחסת בסופו של דבר לעצמה, לבדיחה החיצונית ולא לבדיחה שהיא גיבורת הסיפור.

ההומור ישמש לאורך הספר כתבלין, אבל מעבר לכך יש לי גם מטרה רצינית. אני רוצה להיעזר בבדיחות מעגליות כדי לנסות להשיב על שאלה עתיקה – מה גורם לנו

לצחוק. השאלה מהי בדיחה, ואיך פועל מנגנון הבדיחה על מוחנו, היא חידה קלאסית, שמעסיקה הוגים מאז ימי היוונים הקדמונים. הבדיחות המעגליות הן פתח מצוין לפתרון החידה הזאת, משום שהמבנה שלהן חד ומובהק. מהלך החשיבה בהן שקוף יותר מאשר בכל סוג בדיחות אחר. קל מאוד לעקוב אחריו, ולהיווכח מה מצחיק בו. כך יעזרו לנו החתולים והזנבות לפתוח צוהר לשאלה מהו הומור.

הודעה ברדיו קונגו: "בעיית הקניבליות בארץ חוסלה. אכלנו את הקניבל האחרון".

חלק ראשון: פרדוקסים

אני שומע משהו נופל, אמר הרוח.
שום דבר, זה רק הרוח, הרגיעה האם.
("אני שומע משהו נופל", נתן זך)

סתירות מועילות

את סיפורה של המעגליות מן הראוי לפתוח בבעלי זכויות היוצרים עליה - היוונים הקדמונים. כמו הרבה רעיונות רבי השפעה בתרבות המערב, גם רעיון המעגליות נולד ביוון העתיקה. בשביל היוונים היה הרעיון הזה שעשוע חשיבה, אבל כידוע הם התייחסו לשעשועי חשיבה ברצינות רבה.

בין שעשועי החשיבה, היה בעיני היוונים מעמד מיוחד לפרדוקסים. פרדוקס הוא סתירה לחוקי החשיבה או הטבע, אבסורד שמופיע כאילו מאליו. מסקנה בלתי אפשרית נולדת מהנחות שנראות חסרות פגם, טענה מתבררת כנכונה ולא נכונה בעת ובעונה אחת, או ששתי אינטואיציות שאין לערער אחריהן מתגלות כמנוגדות זו לזו. פרדוקס מעמיד מראה לא מחמיאה בפני החשיבה שלנו, ומספר לנו שאיננו מבינים דבר מה אלמנטרי. הוא שומט את הקרקע מתחת למשענת הבסיסית ביותר בהתנהלותנו מול העולם, ההיגיון. במצב כזה, השומע חש שהוא חייב להחזיר את העולם לסדרו.

זו אינה משימה פשוטה. כדי להשיב את הדברים על תיקונם צריך להבין את מקור הטעות, והדבר דורש בחינה של ההנחות הסמויות שאפשרו את קיומה. זהו סוד תועלתם של הפרדוקסים. הם מכריחים אותנו לעשות סדר בחשיבתנו. דוגמה מפורסמת היא הפרדוקסים של זנון. זנון חי בין השנים 495 ו-420 לפסה״נ בעיר אֶלֶאָה שבדרום איטליה (בכף הרגל של המגף המפורסם), באזור שאכלס מהגרים מיוון. בשנת הולדתו מת באותו אזור יווני מפורסם אחר, פיתגורס. זנון התעניין בתנועה, וכתב ספר שבו מנה ארבעים פרדוקסים על תנועה. הספר אבד, אבל כמה פרדוקסים שרדו. המפורסם ביניהם הוא ללא ספק זה של אכילס והצב.

אכילס, מגיבורי מלחמת טרויה, עורך תחרות ריצה עם צב. בהגינותו הוא נותן לצב מקדמה של (נאמר) 10 מטרים. תחילה על אכילס לעבור את 10 המטרים, כדי להגיע למקום שבו היה הצב קודם לכן. בינתיים התקדם הצב מעט. אמנם הוא מהלך לאיטו, אבל הוא מהלך. עתה על אכילס להגיע למקום החדש של הצב. בינתיים התקדם הצב מעט – כנראה מעט מאוד, ובכל זאת התקדם. אכילס צריך לעבור גם את כברת הדרך הקטנה הזאת, ובינתיים הצב יתקדם, זו הפעם מעט מאוד מאוד, אבל הוא יתקדם. כל פעם שאכילס מגיע למקומו הקודם של הצב, הצב יתקדם עוד

מעט. המסקנה – אכילס לא יוכל לעולם להשיג את הצב. אלא שכמובן לא כך קורה במציאות – ערכו תחרות ריצה עם צב והיווכחו.

הפרדוקס הזה התברר כפורה מאוד. הוא הכריח את הפיזיקאים והמתמטיקאים לחשוב מה קורה כאשר עוברים פרקי זמן "קטנים לאינסוף", כלומר שואפים לאפס. בסופו של דבר התפתח מן הרעיונות האלו במאה השבע עשרה הכלי המתמטי המועיל ביותר, שני רק למספר - החשבון הדיפרנציאלי.

רשימת פרדוקסים מפורסמת עוד יותר הייתה של אֶוּבּוּלִידֶס, שחי בעיר מילֶטוּס ביוון במאה הרביעית לפסה"נ. שבעת הפרדוקסים ברשימה שלו נמצאו במוקד של דיונים סוערים לאורך כל העת העתיקה, ושניים מהם – פרדוקס השקרן ופרדוקס הערימה, נדונים בספרות הפילוסופית בשצף קצף עד עצם היום הזה. בעוד שהפרדוקסים של זנון חשפו סתירות (כביכול) בתפיסתנו את העולם הגשמי, הפרדוקסים של אובולידס הצביעו על סתירות (כביכול) בחוקי ההיגיון. לפרדוקסים כאלו קוראים "פרדוקסים לוגיים". הם אלו שיעניינו אותנו בספר הזה, משום שזהו סוג הפרדוקסים שאליו מובילה המעגליות.

פרדוקס, זאת יש להבין, לעולם אינו סתירה אמיתית. הוא בסך הכול אינדיקציה לטעות. מישהו מאחז את עינינו, מעטה הנחה מוטעית בלבוש מהוגן, מסתיר אותה היטב, ומקווה שניפול בפח. אם אכן כך קורה, ואנחנו מאמינים בתקפותה של ההנחה, רוב הסיכויים הם שנגיע למסקנות אבסורדיות. הנחה מוטעית מטבעה שהיא מולידה מסקנות מוטעות. פרדוקס הוא אם כן מסקנה אבסורדית על פני השטח, שנובעת מטעות שמתחת לפני השטח. פתרונו של פרדוקס הוא חשיפת הטעות.

ישנם פרדוקסים שבהם הרמאות קלה לגילוי. למשל, סוג הטעיה מוכר במתמטיקה הוא ביצוע של פעולה אסורה, כמו חילוק ב-0, או הוצאת שורש ממספר שלילי. רמאויות כאלה הן אתגרים ליכולת ההבחנה של שומעיהן, לא יותר מזה. הפרדוקסים שבהם ידובר כאן, לעומתם, נדונים בספרות כבר אלפי שנים, ומעוררים עניין מחודש דור אחר דור. זהו אות שמישהו טרח בהם היטב על מלאכת ההסוואה, ודאג שהרמאות לא תיחשף בקלות.

וכאן מתבררת עובדה מפתיעה: רוב הפרדוקסים הלוגיים שזכו לשרוד לאורך הדורות משתמשים באותה תחבולת הטעיה, המעגליות. לפעמים תפקידה של המעגליות עקיף, וקשה לגלותו. זה קורה למשל ב"פרדוקס הערימה", שכבר הוזכר,

מתוך רשימתו של אובולידס. הנה הוא: גרגר אחד של חול אינו ערימה – אף אחד לא יקרא לגרגר יחיד "ערימה". נניח שלפנינו יש מספר מסוים של גרגרי חול, שאיננו ערימה. אם נוסיף לו גרגר אחד, ברור שהתוספת אינה מספיקה להפוך את החול לערימה. הרי גרגר אחד לא משנה באמת. אם נמשיך בטיעון הזה, ונוסיף עוד ועוד גרגרים, נמצא שאף מספר של גרגרים אינו יוצר ערימה. אבל זה נמצא בסתירה מובהקת לכך שליד הבנין שנבנה בסמוך לביתי יש ערימה של חול, ויש בו מספר מסוים של גרגרים. אולי מספר גדול, אבל מספר סופי. אינני יודע מה דעתכם על הפרדוקס הזה – אני עצמי אינני מוצא בו עומק מיוחד. אבל גם בו, אי שם, חבויה מעגליות, שאספר עליה בנספח ו'.

בפרדוקסים המפורסמים האחרים המעגליות מופיעה בצורה ישירה יותר. כולם דומים להטעיה הבאה: נגדיר מספר כ"מספר המוגדר במשפט זה, ועוד 1". כמובן, זו אינה הגדרה תקינה, משום שהמושג מוגדר בעזרת עצמו, ועל כן אינו מצביע על משהו במציאות. "מספר תושבי סין ועוד 1" הוא ביטוי תקין, שמצביע על מספר בעולם, ואילו "מספר זה ועוד 1" רק מתחזה לביטוי תקין. וכמו עם כל מתחזה, רצוי לעמוד על המשמר. נפילה ברשתו מזמינה צרות. אם מניחים שהוא מצביע על מספר בעולם, מקבלים פרדוקס – מספר ששווה לעצמו ועוד 1.

ההטעיה הזאת תמימה מכדי שמישהו יתייחס אליה ברצינות. אולם למעגליות יש תכונה שהופכת אותה לכלי יעיל ליצירת פרדוקסים: קלות הסוואה מיוחדת במינה. כאמור, המוח שלנו אינו רגיל למושגים שמתייחסים לעצמם, ולכן קל להונות אותו בעזרת מושגים כאלה. גם הסוואה קלה של מושג מעגלי תפתה אותנו לחשוב שהוא מוגדר היטב.

- מה יותר רע, בורות או אדישות?

- לא יודע. אבל מה זה משנה?

תנינים ועורכי דין

אפתח בשני סיפורים יווניים, שהם ספק פרדוקסים ספק מעשיות משעשעות, אבל בשניהם מכבבת המעגליות. למעשה, הדבר שמונע מהם מלהיות פרדוקסים כהלכתם הוא שהמעגליות יותר מדי גלויה בהם.

במאה החמישית לפני הספירה פרח באתונה מקצועם של הסופיסטים, מורים לאמנות הויכוח. באותה תקופה לא נדרש רישיון כדי לעסוק בעריכת דין, ועורכי הדין היו נשכרים על פי יכולותיהם הרטוריות. הסופיסטים שימשו על כן מורים גם לעריכת דין. אחד המפורסמים ביניהם היה פרוטגורס, שזכור כיום בעיקר בזכות דיאלוג של אפלטון, שבו הוא בן הפלוגתא של סוקרטס. קיקרו, הנואם הרומי הגדול, השתמש בספרו "אקדמיקה" בדמותו של פרוטגורס כדי לספר סיפור עם מסקנה פרדוקסלית. פרוטגורס הוא עורך הדין בסיפור הבא.

> עורך דין ותלמידו ערכו ביניהם הסכם: אם התלמיד יזכה במשפט הראשון שלו, הוא ישלם למורה סכום כסף נקוב מראש כשכר לימוד. אם יפסיד, יהיה פטור משכר הלימוד. והנה, כשסיים התלמיד את לימודיו, הודיע למורה שהוא מסרב לעמוד בהסכם – הוא אינו מתכוון לשלם ולו גם פרוטה אחת כשכר לימוד, בשום מקרה.
>
> למורה לא נותרה ברירה, אלא לתבוע את התלמיד. זהו כמובן המשפט הראשון של התלמיד, ולכן אם יזכה בו, על פי ההסכם עם המורה יהיה עליו לשלם את שכר הלימוד. אבל זכייה משמעה בדיוק שלא יצטרך לשלם, משום שעל כך המשפט!
>
> בדומה, אם יפסיד, על פי ההסכם לא יהיה עליו לשלם את שכר הלימוד. אולם הפסד של התלמיד (שמשמעו זכייה של המורה) פירושו שהוא יצטרך לשלם!

פרדוקס? לפחות נדמה כך. התלמיד משלם את שכר הלימוד אם ורק אם אינו משלם, וזוהי מסקנה בלתי אפשרית. אבל אם חושבים רגע, מבינים שבעצם אין כאן סתירה. אין זה שבמציאות קורים שני דברים הפוכים. יש כאן רק הבטחה שאי אפשר לקיים. במקרה מסוים, שבו המשפט הראשון של התלמיד הוא מול המורה,

ההסכם מוגדר בעזרת עצמו: "תזכה במשפט אם ורק אם לא תזכה במשפט". במקרה כזה החוזה פשוט אינו ניתן למימוש.

גם בסיפור היווני הבא, מתקופתו של פרוטגורס עצמו, יש הבטחה שלא ניתן לבצעה. התנאי לקיום ההבטחה מוגדר על פי הגשמתה, על דרך השלילה: מימוש מתברר כאי מימוש. כאילו מישהו מצהיר "אני מבטיח לא לקיים את ההבטחה הזאת". לסיפור קוראים "דילמת התנין".

> תנין חטף תינוק. לאם שעומדת על גדת הנהר הוא אומר: "אמרי לי משפט; אם תאמרי אמת, אטרוף את התינוק. אם תאמרי שקר, אטביע אותו". האם המחוכמת עונה: "אתה תטביע את התינוק". עתה, אם התנין יטרוף את התינוק, נבואתה של האם לא התגשמה, כלומר האם דיברה שקר, ולכן התנין צריך להטביע את התינוק. אם התנין יטביע את התינוק, האם אמרה אמת, ועליו לטרוף אותו.
>
> למי שמאמין ביושרתם של תנינים (מי שמוכן לקבל תנינים מדברים לא יתקשה להאמין גם בכך), הסוף הוא טוב – התנין אובד העצות נאלץ להחזיר את התינוק לידי האם, ולחזור לנהר חפוי ראש.

גם זה אינו פרדוקס, אלא אם כן מניחים שהבטחתו של התנין ניתנת להגשמה. אם אכן מניחים כך, מתקבלת סתירה: התנין טורף את התינוק אם ורק אם הוא מטביע אותו (שלפי הנחתנו פירושו שאינו טורף אותו). אבל ההנחה שההבטחה ניתנת לקיום היא טעות: כשהבטחה מוגדרת עצמית, ייתכן מאוד שלא תהיה ניתנת לביצוע.

בכל פרדוקס יש עניין כזה, של משהו שאנחנו מניחים שהחיים, או ההיגיון, הבטיחו לנו. וצריך לזכור שלא תמיד אפשר לקיים הבטחות. במיוחד אם הן מוגדרות בעזרת עצמן, כלומר התנאי שהן מציבות מוגדר על ידי עצם קיום ההבטחה.

> קרוב לוודאי שהדתיים יירשו גיהינום. אלוהים הוא אתאיסט.

אֶפִּימֶנִידֶס והתעוריוט

בפרדוקס הבא נדמה, לפחות, שלא מדובר בהבטחה. מדובר בהנחה שנראית איתנה כסלע: שכל משפט שנאמר לנו הוא או אמיתי או שקרי. שכל טענה באה לעולם עם תווית "אמת" או "שקר" צמודה לדש בגדה. בלוגיקה קוראים לתווית הזאת "ערך האמת" של המשפט, ערך שכאמור יכול להיות "אמת" או "שקר". ההנחה היא שאף אם התווית חבויה בדש פנימי של הבגד, וצריך להפוך את הבגד ולהתבונן בו היטב כדי למצוא אותה, בכל זאת היא תמיד קיימת.

כפי שנראה, זה לא מדויק. משפט צריך "להרוויח" את התווית שלו ביושר. ליתר דיוק, בבדיקה. צריך לבדוק אם הוא אמיתי או לא. לפעמים מטלת הבדיקה מוגדרת עצמית, ואז אין למשפט "תווית" – אין לו ערך אמת. אבל בואו נגיע לסיפור עצמו.

מדובר במפורסם בין כל הפרדוקסים, הרחק לפני כל השאר, "פרדוקס השקרן". אלפי מאמרים וספרים נכתבו עליו, ויותר מאדם אחד יצא בגללו מדעתו. לפי המסופר, ההוגה היווני פִּילֶטָס איש קוס (340 – 280 לפסה"נ) מת מתסכול, או אולי מחוסר שינה, כשניסה לפתור אותו. מכיוון שהוא כה מפורסם, ומכיוון שכה רבים מתייחסים אליו בכובד ראש, אציג אותו תחילה דווקא לא בנוסחו המקורי, אלא בנוסח קצת יותר משעשע. הסתכלו במשפט הבא:

במשפט זה יש שתי טעויוט

במשפט הזה יש טעות כתיב – זוהי טעות אחת. אבל חכו רגע - אם כן גם הטענה שיש בו שתי טעויות היא מוטעית! יש בו רק אחת! אם כן, יש בו שתי טעויות, טעות הכתיב והטעות במניית הטעויות. אבל חכו שוב: אם כן לא טעינו במנייה! אכן יש שתי טעויות! אבל אם כן, יש רק טעות אחת, טעות הכתיב! שפירושו שוב, שטעינו במניית הטעויות, יש שתי טעויות!

אם אתם חשים סחרחורת, כשל חתול שרודף אחר זנבו, השגתי את מטרתי. זוהי הזדמנות להיווכח במה שקורה כאשר התייחסות עצמית מביאה לבלבול: אנחנו נכנסים למעגל אינסופי. קוראים לזה גם "נסיגה אינסופית". צועדים צעד, ועוד אחד, בתקווה להגיע אל הנחלה ולמצוא בסיס שאפשר להישען עליו, ולא מגיעים.

שתי טעויות, או טעות אחת? בשני המקרים מגיעים לבעיה. בכל בחירה מגיעים לסתירה. אם כן, זהו פרדוקס. כאמור, הוא בסך הכול הֶגוֶן (וריאציה) על הפרדוקס המפורסם של השקרן. השקרן מדבר על משהו פשוט יותר, טעות אחת. הוא אומר: **משפט זה הוא טעות**. או בניסוח מעט שונה:

מ׳: משפט זה שקרי.

מכיוון שארצה להתייחס למשפט הזה בהמשך, כיניתי אותו בשם, מ׳.

המעגל שאליו נכנסים דומה לחלוטין למעגל שיוצר המשפט בדבר שתי הטעויות. אם המשפט נכון, אז הוא טעות (הרי זה מה שהוא טוען, שהוא טעות). מצד שני, אם המשפט מוטעה, אז הוא לא שקר, כלומר הוא נכון. בכל מקרה מגיעים לסתירה.

הפרדוקס הזה הופיע ברשימת הפרדוקסים של אובולידס, שכבר הזכרתי. מעניין לציין ששם הוא מופיע בצורה לא מדויקת, שאינה מובילה לפרדוקס אמיתי. אובולידס מספר על אפימנידס הכרתי, שטען ש״כל הכרתים שקרנים״. זו אינה סתירה אמיתית: ייתכן בהחלט שהמשפט הזה פשוט לא נכון. אי נכונות של המשפט פירושה שיש כרתי כלשהו שמדבר אמת, לאו דווקא אפימנידס. אבל מה בכך אם כרתי אחר אומר דברי אמת? אין להסיק מכך שהמשפט של אפימנידס אמיתי, ולכן אי אפשר להמשיך ולגלגל את הפרדוקס. אובולידס לא היה טיפש, והשערתי היא שהוא בסך הכול ציטט משפט שאכן נאמר היסטורית, ושלמעשה הוא התכוון לפרדוקס השקרן כפי שאנו מכירים אותו.

בואו נחזור לרגע ל-מ׳. מה הראינו?

שלא ייתכן שהוא לא נכון, כלומר הוא נכון.

שלא ייתכן שהוא נכון, כלומר הוא לא נכון.

בהמשך נשתמש בזה, אם כן אנא שמרו בזיכרון: הראינו ש-מ׳ גם נכון והראינו גם שהוא לא נכון.

האם הרצינות שבה התייחסו לפרדוקס השקרן דורות של הוגים מוצדקת? מושגיו לא נראים מורכבים, וקשה לשער שההטעיה שבו מצביעה על עומק. ואכן, הוא אינו שונה מהותית מן ה״פרדוקס״ שנוצר כאשר מגדירים מספר כעצמו ועוד 1, ומאמינים שההגדרה הזאת מתייחסת למספר במציאות. יש בו מושג מוגדר מעגלית, וכל מה שצריך לעשות הוא להיזהר ולא להיכנס למעגל.

מה שמוגדר באורח מעגלי בפרדוקס השקרן זה הוא ערך האמת של המשפט מ׳. כלומר, התווית ״שקר״ או ״אמת״. חישבו לרגע איך אתם בודקים את אמיתותו של המשפט ״החתול שלי שחור״. נניח שאתם רוצים להדביק לו תווית ״אמת״ או תווית ״שקר״ – מה תעשו? פשוט – תבדקו את הצבע של החתול. אם החתול שחור תכתבו בתווית ״אמת״ ואחרת ״שקר״. בדיקת אמת משווה את המשפט עם האובייקט שלו. אם תבדקו איך אנשים מדביקים תוויות ״אמת״ או ״שקר״ למשפטים, תגלו שהם עושים בדיוק זאת.

בואו נפנה עתה ל-מ׳. מהו האובייקט שלו? מה צריך לבדוק כדי להדביק לו תווית? הוא מדבר על התווית שלו, ערך האמת שלו עצמו. הרי הוא אומר שהתווית הזאת היא ״שקר״. אם כן, כדי לקבוע את ערך האמת (התווית), צריך לדעת תחילה מהי התווית. תנאי מוקדם לביצוע הבדיקה הוא ידיעה מה תהיה תוצאתה שלה עצמה.

פירוש הדבר הוא שהבדיקה מוגדרת מעגלית – היא מניחה שהיא כבר בוצעה. אחרת אין עם מה להשוות – אם תווית ה״אמת״ או ה״שקר״ עדיין לא מודבקת, עדיין אין משהו במציאות שאפשר לבדוק. במילים אחרות, ערך האמת של מ׳ מוגדר בעזרת עצמו. למעשה – הוא מוגדר כהפך מעצמו. אם כן הוא לא קיים, בדיוק כפי שהמושג ״מספר זה ועוד 1״ מוגדר בעזרת עצמו, ולכן אין מספר שמתאים לו במציאות.

יש המייחסים חשיבות לפרדוקס השקרן כנקודת מוצא לדיונים במושג האמת. נהוג לסבור שהוא מאלץ אותנו להגדיר במדויק את הקריטריונים לאמת. בין השאר בנוגע לטענה שהבאתי לעיל – שכדי לבדוק אם המשפט ׳החתול שחור׳ אמיתי בודקים אם החתול שחור. זהו נושא לאחת המחלוקות המפורסמות ביותר בפילוסופיה. יש הטוענים שהאמירה הזאת טאוטולוגית, כלומר אינה מחדשת דבר. הם סבורים ש״המשפט ׳החתול שחור׳ אמיתי״ אינו מחדש דבר על פני ״החתול שחור״, וששני המשפטים אומרים בדיוק אותו דבר. לטענה הזאת קוראים ״תורת המיותרות״, משום שהיא אומרת שמושג ה׳אמת׳ מיותר. התורה הזאת הוצגה לראשונה בצורה מפורשת על ידי פרנק רמזי האנגלי (Frank Ramsey, 1908 – 1936), שבימי חייו הקצרים הספיק לתרום תרומות משמעותיות בפילוסופיה, במתמטיקה ובכלכלה. מאז נשפכו עליה הרבה מאוד מילים. אני לא אוסיף עליהן כאן אלא זאת שאני ממליץ לבעלי התורה הזאת לנסות להסתדר בלי המילה ׳אמת׳. קרוב לוודאי שייכשלו. מטרתי בקטע הזה הייתה רק לספר לקורא על עוד תחום שבו המעגליות פורעת סדר ומבלבלת אנשים – הגדרת המושג ׳אמת׳.

לטעמי, תהילתו של פרדוקס השקרן לא אמורה לבוא לו מהבהרת מושג ה׳אמת׳, אלא ממקום אחר. הוא אכן הועיל בהיסטוריה של המדע, אולם לא בפילוסופיה אלא במתמטיקה, שם סיפק השראה לתגלית גדולה. קורט גדל הלביש אותו בלבוש מתמטי, וכך הוכיח משפט חשוב. אספר לכם על כך בחלקו הרביעי של הספר.

אני לא טועה אף פעם. פעם חשבתי שטעיתי, אבל זה היה בטעות.

פרדוקס שימושי מאוד

בשנת 476 כבשו שבטים גרמניים את רומא והדיחו את הקיסר האחרון, רומולוס אוגוסטולוס. נקודת הזמן הזאת נחשבת לראשיתם של ימי הביניים. במשך ארבע מאות השנים הבאות, ואף אחר כך, תיטלטל אירופה בין כיבושיהם של שבטים גרמניים מצפון, מגיארים, מונגולים ואבארים (קרוביהם של ההונים) מן המזרח, והערבים שהגיעו ממערב, מספרד. מן התרבות היוונית, כפי שהועברה לאנושות דרך כיבושיהם של אלכסנדר מוקדון ואחריו הרומאים, לא נותר הרבה, וגם לא הוצע לה תחליף של ממש. ספינה שמתנודדת בים גועש אינה כר נוח להתפתחות מדעית.

אולם גם כשהעניינים התייצבו, והסדר חזר במקצת על כנו, לא שב המדע להתקדם. לא סתם מדברים על ״חשכת ימי הביניים״. אחת הסיבות לכך הייתה תְּעוּל החשיבה לכיוון אחד – הדת. קרוב לאלף שנים התפלפלו תיאולוגים על היחס בין רכיביו של השילוש הקדוש, מי מבין השלושה אחראי על מה. בסביבות 1000 לספה״נ נולדה מכך צורת חשיבה שנקראת ״סכולסטיקה״, שפירושה ניסיון להוכיח בנימוקים הגיוניים את עקרונות הנצרות. ומכיוון שהמעגליות היא כר נרחב ללהטוטי חשיבה, גייסו אותה הסכולסטיקנים לעזרם. יותר מפעם אחת הם השתמשו בנוסחים שונים של פרדוקס השקרן כדי להוכיח את קיום אלוהים. מתברר שזהו פרדוקס שימושי מאוד.

כיצד הופכים פרדוקס להוכחה לוגית? הסוד פשוט. משתמשים בעובדה בסיסית שלומדים בקורס ראשון בלוגיקה: שמִסתירה נובע כל דבר. אם הוכחתם סתירה, הצלחתם להוכיח כל מה שעולה בדעתכם – ש-2=1, שיש אלוהים, שאין אלוהים, שהמפלצת מאגם נס קיימת, שהמפלצת הזאת אינה קיימת. קראתי פעם מאמר מתמטי שבו המחבר התיימר להוכיח (עם קריצה) סתירה, ואת המאמר שלו סיים בכך ש״אם כך הוכחתי את כל ההשערות הפתוחות במתמטיקה״ (ושכח לציין – גם את שלילתן).

אבל קודם כל עלי להסביר במפורש מה פירוש ״סתירה״. סתירה היא הוכחה שטענה מסוימת נכונה, ובאותה עת גם שלילתה נכונה. למשל שהיום יורד גשם, וגם לא יורד גשם. מדוע סתירה מוכיחה כל דבר? כדי להבין זאת צריך להכיר את המושג ״גרירה לוגית״. גרירה היא משפט מן הצורה ״אם...אז״. אפשר לראות זאת כמילוי הבטחה.

למשל, אם אב מבטיח לבנו ״אם ירד היום גשם, אז אקנה לך גלידה״, מתי הוא יכול לטעון שמילא את ההבטחה? אם לא ירד גשם, הוא פטור – הוא יכול לטעון שעמד בהבטחתו, בין אם קנה לבנו גלידה ובין אם לא. רק אם ירד גשם הוא חייב לקנות גלידה.

זוהי הפואנטה בהוכחת טענות מסתירה. טענה מן הסוג ״אם א׳ אז ב׳ ״ נכונה אוטומטית אם א׳ לא מתקיים. ההבטחה מקוימת אז בין אם ב׳ נכון, ובין אם לא.

בואו נשתמש בכך. הסתכלו במשהו שהוא בעליל לא נכון, כמו ״2=1״. אמירה ״אם 2=1 אז המפלצת מאגם נס קיימת״ נכונה בין אם המפלצת קיימת ובין אם לא, פשוט משום שהרישא של המשפט, 2=1, לא נכון. בהחלטות לקראת השנה החדשה אתם יכולים לכתוב ״אם 2=1 אשיל ממשקלי 20 קילוגרם״, ללא חשש שלא תעמדו בהבטחתכם.

כל זה אינו מועיל, אלא אם כן – אלא אם כן בא מישהו והופך את המציאות על פיה, ומוכיח אבסורד. למשל, ש-2=1. יחד עם הטענה שאנו יודעים שהיא נכונה, ש-1 אינו שווה ל-2, זוהי סתירה, טענה שגם היא וגם היפוכה ניתנות להוכחה. אתם מסתכלים עתה במחברת הלוגיקה שלכם, שבה כתבתם בביטחון מוחלט ״אם 2=1 המפלצת מאגם נס קיימת״, יודעים שזה נכון, ועכשיו אתם גם יודעים (כי מישהו הוכיח לכם) ש-2=1. אם כן, הוכחתם שהמפלצת קיימת.

כך מוכיחים מסתירה מה שרוצים. אם הוכחתם סתירה, כלומר טענה והיפוכה, תצליחו להוכיח שזכיתם בפיס, ובאותה צורה גם שלא זכיתם, ושמוחמד היה יהודי שומר מצוות. פרדוקס אחד, שמספק סתירה אחת, מוכיח את כל הדברים בעולם – בין השאר את כל הסתירות שבעולם! וכאן נכנס לתמונה פרדוקס השקרן. כי הוא אכן מספק סתירה. המשפט מ׳ הוא, כזכור, גם נכון וגם לא נכון. אם כן, אפשר להוכיח ממנו הכול. מי שרוצה יכול להשתמש בו כבנשק לוגי רב עצמה, ולהוכיח כל שיעלה על דעתו. ואכן, רבים שמו לכך לב, והשתמשו בפרדוקס השקרן כמקפצה להוכחת טענות אבסורדיות. בפרקים הבאים אספר על הוכחות כאלה.

זה לא שאין לי דעה בעניין. דווקא יש לי, הבעיה היא שאינני מסכים איתה.

השקרנים של סמליאן

ריימונד סמליאן (Raymond Smullyan, 1919 -) הוא מתמטיקאי ומחבר חידות מתמטיות אמריקני מפורסם. הוא גם חובב מעגליות מושבע, בין השאר משום שעיסוקו המתמטי הוא בנושא המעגליות. ספרו הידוע ביותר, "מה שמו של הספר הזה?", מכיל הרבה חידות וחידודים שנוגעים למעגליות.

אחד הסיפורים החביבים על סמליאן הוא על אי, שבו גרים שני סוגים של אנשים: דוברי אמת, שכל משפט שיוצא מפיהם הוא אמיתי, ושקרנים, שאינם מסוגלים להוציא מפיהם דבר אמת. סמליאן משתמש בהם לחידות היגיון מסוגים שונים. הנה דוגמה מפורסמת. אתה מגיע לפרשת דרכים, שרק אחת הדרכים המתפצלות בה מוליכה אל העיר (נקרא לה ע') שהיא מחוז חפצך. בפרשת הדרכים עומד אדם, שאינך יודע אם הוא שקרן פתולוגי או דובר אמת כפייתי. לרשותך שאלה אחת – איך תשיג מן האדם את האינפורמציה שאתה צריך? התשובה – שאל אותו: "לו היית אדם מן הסוג ההפוך לשלך, איזו משתי הדרכים היית אומר לי שהיא מובילה ל-ע'?" שאל, קבל תשובה, ועשה ההפך: נסו להבין מדוע התשובה הנכונה היא ההפך ממה שהבחור אומר, בין אם הוא דובר אמת ובין אם הוא דובר שקר. (אפשרות אחרת היא לשאול "מה היה אדם אחר מסוגך עונה", ולפעול בדיוק על פי ההוראה שייתן.)

בחידוד אחר משתמש סמליאן בסיפור השקרנים ודוברי האמת כדי להגיע לפרדוקס השקרן, ובעזרתו להוכיח – להוכיח מה? ובכן, כאמור, מה שרוצים. מפרדוקס השקרן אפשר להוכיח כל דבר.

הנה הסיפור. יום אחד נתפס אחד מיושבי האי בידי המשטרה בחשד לרצח. הוא מובא למשפט, ושם הוא טוען כך: "הרוצח הוא דובר שקר". מתברר שבזכות הצהרה זו לבדה חייבים שוביו להוציאו לחופשי! חישבו: אם הוא דובר אמת, כי אז אמירתו נכונה, כלומר הרוצח הוא דובר שקר, ואם כך אין זה הנאשם (שבמקרה שאנו מניחים כרגע הוא דובר אמת). אם הנאשם הוא דובר שקר, כי אז עדותו אינה נכונה, כלומר הרוצח הוא דובר אמת. אבל אז הנאשם אינו יכול להיות הרוצח, משום שבמקרה זה, על פי ההנחה הוא דובר שקר!

הבעיה היא שהנאשם נתפס על יד הגופה עם סכין נוטף דם בידו וחיוך מרושע מרוח על פניו מאוזן לאוזן. כלומר, הוא הצליח להוכיח דבר שבעליל אינו נכון. הוא בבירור

הרוצח. נדמה שבאותה שיטה היה יכול להוכיח כל דבר – והוא אכן יכול. ראו נא מה הוא טוען: כשהוא אומר "הרוצח הוא דובר שקר" הוא אומר "אם אני הרוצח, אז **אני** דובר שקר, כלומר משפט זה שקרי". כלומר הוא אומר:

אם אני הרוצח, אז מ׳ נכון.

כזכור, הראינו ש-מ׳ נכון, ולכן המשפט הזה נכון, ממש כפי שהמשפט "אם היום יום שלישי אז לונדון היא בירת אנגליה" נכון בין אם היום יום שלישי ובין אם לא. אם הסיפא, ב׳, במשפט "אם א׳ אז ב׳ ", נכון, אז המשפט נכון.

מצד שני, הראינו גם ש-מ׳ לא נכון (זוהי כל הפואנטה – הוא סתירה). לכן מן ההנחה "אני הרוצח" נובע משהו לא נכון, ולכן אינני יכול להיות הרוצח. בלוגיקה קוראים לכך "הוכחה על דרך השלילה", ובנוסח הלטיני reductio ad absurdum, כלומר להביא לידי אבסורד. בפי העם מבטאים זאת "אם אני הרוצח, אז אני קוגלגר", כשהכוונה לכך שמכיוון שאינני קוגלגר אינני יכול להיות הרוצח. זהו בדיוק מה שקורה כאן – בהבדל המוזר שמישהו הצליח להוכיח לך גם שאינך קוגלגר, וגם שאתה דווקא כן קוגלגר (הוא הוכיח ש-מ׳ גם נכון!)

כמובן, לו היה אומר "אם אינני הרוצח אז אני דובר שקר" היה מוכיח בדיוק באותה דרך ש"אינני הרוצח" מוביל לסתירה, כלומר שהוא דווקא כן הרוצח.

סמליאן מספר שכשהיה בן 10 בא אחיו הגדול לחדרו בבוקרו של 1 באפריל, ואמר לו: "היום אסדר אותך כפי שלא סידרו אותך מעולם". סמליאן הצעיר חיכה, וחיכה, וחיכה, ודבר לא קרה. עד היום, אומר סמליאן, הוא לא בטוח אם אחיו סידר אותו או לא. אם הוא לא סידר אותו, כי אז הוא עשה ההפך משהבטיח. כלומר הוא סידר אותו. אבל אם הוא אכן סידר אותו, כלומר מילא את הבטחתו, אז הוא בעצם לא סידר אותו... ואידך זיל גמור (או שלא).

בּוּרִידָן ופילים ורודים

ז'ן בורידן הצרפתי (Jean Buridan, 1300 - 1358) השתייך לזרם הסכולסטיקה, שהיא כזכור התפלפלות לצורך הוכחת צדקתם של עקרונות הנצרות. אלא שהוא לא היה סכולסטיקן טיפוסי – הוא התחיל את דרכו כהרפתקן רודף נשים, תרם תרומות לפיזיקה (הוא היה הראשון שדיבר על התמדה של גופים, כלומר זאת שגופים ממשיכים לנוע גם ללא שפועל עליהם כוח חיצוני, אלא אם כן עוצרים אותם בתנועתם), וסירב להצטרף למסדר דתי כלשהו. כיום שמו ידוע בעיקר בזכות "החמור של בורידן", גיבורו של סיפור שהמציא. החמור הזה רעב וצמא באותה מידה, מימינו חבילת חציר ומשמאלו שוקת מים, ומכיוון שאינו יכול להחליט מה הוא רוצה יותר, הוא מת גם ברעב וגם בצמא.

בין השאר, בורידן התעסק בפרדוקס השקרן, ואף הציע לו פתרון. בעקבות העיסוק הזה הגיע להוכחה לקיום אלוהים שמשתמשת בפרדוקס השקרן. למעשה, בדיוק אותה הוכחה שבה השתמש הרוצח של סמליאן כדי להוכיח את חפותו. מכיוון שאינני רוצה להיכנס לויכוחים תיאולוגיים, אשתמש בטיעון של בורידן לצורך הוכחת דבר מה אחר – קיומם של פילים ורודים. טיעונו של בורידן היה זה. התבוננו בצמד המשפטים:

1. אין פילים ורודים.

2. בדיוק אחד משני המשפטים הכתובים כאן אינו נכון.

אם משפט 1 נכון (ורובנו אכן מאמינים שכך הוא) אז רק השני יכול להיות טעות. ומכיוון שהמשפט השני אומר: "בדיוק אחד משנינו טעות", הוא אומר בעצם שהוא עצמו טעות. כלומר במקרה שמשפט 1 נכון, משפט 2 הוא המשפט מ' של השקרן. ו-מ', כאמור, מוביל לאבסורד.

המסקנה? נכונות של המשפט הראשון מובילה לאבסורד. כלומר, הוא אינו יכול להיות נכון. ואם המשפט הראשון לא נכון, יש פילים ורודים.

כאמור, אין זה אלא הגוון על סיפורו של סמליאן. הרוצח של סמליאן אומר "אם אני הרוצח משפט זה שקרי", ומוכיח שלא רצח, ואילו משפט מספר 2 ברשימת שני

המשפטים של בורידן אומר "אם אין פילים ורודים אז (מכיוון שהמשפט הראשון נכון ונותר רק לשני להיות לא נכון) משפט זה שקרי" ומוכיח בכך את קיומם של פילים ורודים. כאמור, בעזרתו האדיבה של השקרן אפשר להוכיח הכול.

> החתן המיועד לוחש לשדכן: "השתגעת? היא צולעת, מגמגמת, גיבנת". "אין צורך ללחוש", אומר לו השדכן, "היא גם חרשת".

אַנְסֶלְם והראיה האונטולוגית

כבר ציינתי יותר מפעם אחת שסוד כוחה של המעגליות הוא בחמקמקות שלה. המוח שלנו אינו בנוי לגלות אותה, ומשום כך היא כלי טוב מאין כמותו בידי מאחזי עיניים, ליתר דיוק מאחזי חשיבה. להגנתם של נוכלים מסוג זה ייאמר שבדרך כלל הם מאחזים לא רק את חשיבתם של אחרים, אלא גם את שלהם עצמם. בפרק זה אספר על טיעון מסוג זה. ההסוואה שבו מתוחכמת יותר מאשר אצל בורידן, ולכן הוא גילה שרידות רבה יותר והחזיק מעמד מאות שנים. פתרון של ממש ניתן לו רק במאה ה-18. בעליו היה אַנְסֶלְם מקנטרברי (1033 - 1109). אנסלם נולד באלפים האיטלקיים, הצטרף למסדר הנזירים הבנדיקטינים, ובתוקף תפקידיו במסדר הזה עבר לצרפת ואחר כך לאנגליה, שם התמנה למשרת הארכיבישוף של קנטרברי. הוא היה מראשוני הסכולסטיקנים, ואחד המשפיעים ביניהם. הנה הטיעון שלו:

> אלוהים הוא בעל תכונות מושלמות. אי קיום הוא פגם. לכן אלוהים, כפי שאנו תופסים אותו, חייב להיות קיים. אם תמצאו שאיזושהי ישות שאתם קוראים לה "אלוהים" אינה קיימת, כי אז הראיתם את אי קיומו של משהו אחר, לא של אלוהים שעליו דובר. בין תכונותיו של האלוהים **ההוא** הייתה גם תכונת הקיום.

הפילוסוף עמנואל קאנט (Imannuel Kant, 1724 - 1804) קרא לטיעון הזה "הראיה האונטולוגית", שפירושו "הוכחה של קיום". כמו על פרדוקס השקרן, גם על הראיה האונטולוגית נשפכו נהרות דיו, והיא נושא לדיון ער עד עצם היום הזה. קאנט גם היה זה שחשף את הרמאות בטיעון. תכונת הקיום, כך הבין, אינה תכונה של האובייקט של מושג, אלא תכונה של המושג. למשל, במשפט "החתול שחור" המילה "שחור" מציינת תואר של החתול. במשפט "החתול קיים", לעומת זאת, המילה "קיים" אינה תואר של החתול, אלא של **מושג** החתול: אנחנו אומרים בכך שלמושג מתאים משהו במציאות. ראיה לכך היא המקרה שבו החתול אינו קיים. כשאומרים "החתול אינו קיים", אין מדברים על החתול (שהרי אין כזה בכלל...) אלא על מושג החתול – אנו אומרים שאין לו דבר מה מתאים במציאות. חישבו על המשפט "היוניקורן אינו קיים" – ברור שמדובר על המושג שבראשנו, לא על יוניקורנים. הרי אין יוניקורנים.

טענתו של קאנט היא אפוא שרעיון "אלוהים, שקיים" מכיל בתוכו עירוב בין מושג מסדר ראשון (אלוהים, שהוא מושג שנוגע לעולם) ומושג מסדר שני (הקיום, שנוגע ביחס בין מושגים לעולם). יותר מכך, המושג דן ביחס בין **עצמו** לבין העולם, שפירושו שהוא מוגדר מעגלית. מושג תקין יכול רק להגדיר תכונות של האובייקט שלו, לא של עצמו. מושג שמייחס לעצמו תכונת "קיום" אינו מותר.

כמובן, בעזרת אותו טיעון אפשר להוכיח את קיומו של כל אובייקט שנבחר. נגדיר, למשל, את היצור הבא – "מפלצת המתגוררת באגם נס, וקיימת". אם תמצא שהמפלצת הזאת אינה קיימת, כי אז לא הייתה זו המפלצת שהגדרנו – זו שלנו הייתה קיימת...

למעשה, מבנה המושג "המפלצת מאגם נס, שקיימת" דומה למדי לזה של פרדוקס השקרן, אף כי אינו זהה לגמרי. חישבו על ההשערה הבאה, נקרא לה ה':

ה': יש מפלצת באגם נס וההשערה הזאת נכונה.

הטענה עתה היא ש-ה' חייבת להיות נכונה. כי הרי אם היא שקרית, אין זו כלל השערה ה'. ההשערה ה' הוגדרה כהשערה נכונה. אבל נכונותה של ה' פירושה, בין השאר, שקיימת מפלצת באגם נס.

היכן הרמאות? כדי לבדוק השערה מעמתים אותה עם המציאות. עם מה צריך לעמת את ההשערה הזאת? מכיוון שהיא מורכבת משני חלקים, צריך לעמת אותה עם שני דברים. האחד הוא עם העובדה שקיימת מפלצת: יש לשער שהתוצאה תהיה שלילית. הדבר השני הוא נכונותה שלה עצמה. אבל הנכונות היא בדיוק תוצאתו של העימות. הרי זוהי מטרתו של העימות עם המציאות – לבדוק אם הטענה נכונה או לא. לכן מטלת העימות מוגדרת בעזרת תוצאתה שלה, כלומר היא מוגדרת עצמית. פירוש הדבר הוא שנכונות הטענה, בדיוק כמו אמיתות משפטו של השקרן, מוגדרת מעגלית. הטיעון כאן שונה מעט מטיעון השקרן. הוא לא "אם הטענה שקרית אז היא אמיתית", אלא "אם היא שקרית אז היא לא היא", אבל הרעיון הכללי דומה.

ציטוט מאתר אינטרנט:

הבעיה עם ציטוטים באינטרט היא שלעולם אין לדעת אם הם אותנטיים. (אברהם לינקולן)

בֶּרִי והמספר שאיננו מוגדר בזאת

ברטראנד ראסל (Bertrand Russell, 1970 – 1872), מתמטיקאי בראשית דרכו (עד 1910 בערך) ופילוסוף בסופה, יופיע בסיפורנו כמה פעמים. ב-1901 גילה פרדוקס, שאליו עוד נגיע, שהיה לו תפקיד חשוב במתמטיקה של אותה תקופה. עקב זאת התעניין בפרדוקסים בכלל. ספרן אוקספורדי בשם בֶּרִי (G.G. Berry), שידע על כך, סיפר לו פרדוקס שהמציא, וראסל פרסם אותו ב-1906.

> כמה מספרים טבעיים אפשר לתאר בעברית בפחות ממאה אותיות? הרבה, אפילו הרבה מאוד. "שלוש עשרה", "מיליון", "מיליון בחזקת מיליון בחזקת מיליון", "מספר תושבי סין", כל אלה הם ביטויים בני פחות ממאה אותיות, שמגדירים מספרים. אבל בעוד שיש אינסוף מספרים טבעיים, מספר הביטויים בני פחות ממאה אותיות הוא סופי. לכן קיימים מספרים טבעיים שאין להגדירם בפחות ממאה אותיות. ביניהם קיים כמובן מספר שהוא הקטן ביותר. אם כן, קיים "**המספר הקטן ביותר שאינו ניתן להגדרה בפחות ממאה אותיות**". אבל ראו זה פלא, המשפט האחרון מגדיר בדיוק את המספר הזה, ובפחות ממאה אותיות!

כבר אמרתי: המעגליות אינה דורשת מאמץ גדול כדי להסתירה. הפרדוקס הזה, שזכה לאינספור איזכורים ודיונים במשמעויותיו, והוא נושא לויכוחים עד עצם היום הזה, אינו אלא תוצאה של הסוואה, אפילו לא מתוחכמת במיוחד, של הגדרה מעגלית פשוטה. חישבו נא מה היה קורה לו היה ברי מחליף את ההגדרה שלו בהגדרה דומה מאוד:

המספר הטבעי הקטן ביותר שאינו מוגדר במשפט זה.

(המספרים הטבעיים הם ...0, 1,2,3).

לכאורה, גם זהו פרדוקס. המספר המוזכר בו שונה מעצמו, פשוט משום שהוא מוגדר כ״שונה מעצמו״. אם המספר הוא 0, כי אז הוא חייב להיות המספר הקטן ביותר השונה מ-0, כלומר, 1; ואילו אם הוא מספר שונה מ-0, נאמר 3, כי אז הוא המספר הקטן ביותר השונה מ-3, שהוא כמובן 0. מספר שונה מעצמו – הרי זוהי סתירה.

אלא שלו היה ברי מנסח את הפרדוקס שלו כך, לא היה איש מתייחס אליו ברצינות. לא חבריו הספרנים ולא ראסל. ברור שההגדרה של המספר אינה תקינה. היא אינה שונה בהרבה מהגדרת מספר כ״עצמו ועוד 1״. ההגדרה המעגלית שקופה מדי.

ב״נסיך הקטן״ של סינט אקזופרי מסופר על אסטרונום תורכי שבא להציג את תגליתו במערב. להרצאה ראשונה הוא מגיע בלבוש תורכי מסורתי, ואז לא מתייחס אליו איש ברצינות. לאחר שהוא לומד את לקחו, והוא חוזר בלבוש מערבי, מקשיבים לו הכול. אותו דבר קורה גם כאן. כי אכן, פרדוקס ברי אינו אלא הסוואה, אפילו לא מתוחכמת במיוחד, לפרדוקס של ״המספר הקטן ביותר שאינו מוגדר בזאת״. הסיפור על ״ביטויים בני פחות ממאה אותיות״ אינו אלא סיפור כיסוי, מין עלה תאנה להסתרת הרמאות. דומה במקצת לטעות שנוספת בפרדוקס ״שתי הטעויות״.

כדי לראות זאת בואו ניקח פרדוקס ביניים, שנמצא בין הנוסח התמים לנוסח המוסווה. נגדיר מספר כ״מספר הטבעי הקטן ביותר השונה מן המספרים 0,1,2,3,4 ומעצמו״. גם הגדרה זו מובילה לסתירה. שוב, המספר מוגדר כשונה מעצמו. או, אם רוצים לומר זאת בפירוש: אם המספר ה״מוגדר״ הוא 5, כי אז הוא חייב להיות המספר הקטן ביותר השונה מ-0,1,2,3,4 ומ-5 (שהוא עצמו), כלומר 6; אבל אם הוא 6 (או כל מספר אחר הגדול מ-5) הוא חייב להיות המספר הקטן ביותר השונה מ-0,1,2,3,4 ו-6, כלומר 5.

כמובן, זהו פרדוקס ״המספר הקטן ביותר השונה מן המספר הזה״, עם מעט הסוואה – הוספנו ארבעה מספרים נלווים, להסחת הדעת. זהו בדיוק מה שעושה גם פרדוקס ברי. הוא מצרף למספר ״הקטן ביותר השונה מעצמו״ מספרים נוספים: את אחת, שתיים, שלוש וארבע, את המספר מיליון, את מספר תושבי סין – בקצרה, את כל המספרים המוגדרים בפחות ממאה אותיות. המספר בפרדוקס מוגדר כשונה מכל אלה, וגם מעצמו – משום שהוא עצמו מוגדר בפחות ממאה אותיות, בהגדרתו כ״מספר הקטן ששונה מכל המספרים המוגדרים בפחות ממאה אותיות״. ההגדרה כוללת על כן גם את הטענה שהמספר ״שונה מן המספר המוגדר בזאת״.

המעגליות בפרדוקס היא אפוא בכך שהמספר מוגדר בעזרת עצמו: הוא מוגדר בעזרת המספרים שמוגדרים בפחות ממאה אותיות, בעוד הוא עצמו אחד מהם. כל שאר המספרים שנוספו למספר ה"קטן ביותר השונה מעצמו" אינם אלא יער שנועד להסתיר את העץ הבודד הזה. קליפה דקה של מהוגנות שהולבשה על ההגדרה המעגלית הביאה אותנו לקבל את ההגדרה כתקפה, להשתאות מהפכפכותו של ההיגיון.

גם את ההגדרה המעגלית "המספר המוגדר בזאת, ועוד 1" טרח מישהו והלביש בבגדים מהוגנים ("אירופאים"). זה היה מתמטיקאי צרפתי בשם רישאר (Jules Richard, 1862 - 1956), שכגמול על עמלו זכה בכרטיס כניסה אל הנצח, בדמות פרדוקס הקרוי על שמו. חלק מפרסומו של פרדוקס רישאר בא לו מכך שקורט גֶדֶל העיד שהוא היה אחד ממקורות ההשראה להוכחת משפטו המפורסם. הפרדוקס הזה מסובך למדי מבחינה טכנית, ולכן אדחה את תיאורו לנספח ב'.

- רוצה לשמוע בדיחה מן הסוף להתחלה?
- כן!
- אז תצחק קודם.

פרדוקס בחינת הפתע

לפעמים מופיע פרדוקס שדומה שהוא חדש, ומתברר שהוא אינו אלא לבוש חדש לפרדוקס ישן. הופעתו של פרדוקס חדש באמת היא דבר נדיר. על כן היה זה בבחינת אירוע ראוי לציון כאשר בסביבות 1950 התפרסם פרדוקס מושך במיוחד בניסוחו, כמעט סיפור מן החיים. על פי אחת העדויות הוא נולד בשוודיה בשנות מלחמת העולם השנייה, כאשר הודיעו ברדיו ש״בשבוע הבא ייערך תירגול פתע של דימוי של הפצצה״, והמתמטיקאי לנרט אקבום (Lennart Ekbom) שם לב לפרדוקסליות שבהכרזה הזאת. כיום הפרדוקס ידוע כ״פרדוקס בחינת הפתע״, או בנוסח אחר – ״פרדוקס התליין״. בהמשך הספר נגלה שגם הפרדוקס הזה אינו באמת חדש, ושהוא למעשה וריאציה על פרדוקס שנוסח על ידי גדל ב-1931. פרדוקס בחינת הפתע הוא מעין ״נוסח מחיי היומיום״, של הפרדוקס של גדל.

> מורה מודיע לכיתתו שבשבוע הבא יהיה להם מבחן פתע. הוא גם מגדיר להם במדויק מהו התנאי למבחן להיות "מפתיע": שהם לא יידעו עליו בביטחה בערב שלפניו.
>
> התלמידים מנסים עתה לנבא מתי יהיה המבחן. מסקנה ראשונה שלהם היא שהוא לא יוכל להתקיים ביום שישי (היום האחרון של שבוע הלימודים), משום שאם לא יינתן לפני כן, יידעו ביום חמישי בערב שהוא יהיה ביום שישי. לפיכך יום שישי יוצא מכלל אפשרות. אבל אם כך, גם יום חמישי אינו אפשרי, שהרי אם עד יום רביעי בערב לא יתקיים המבחן, הרי מכיוון שיום שישי כבר אינו בא בחשבון, יידעו התלמידים כבר אז שהמבחן יתקיים למחרת. גם יום חמישי יוצא אפוא מכלל חשבון, ועתה, באותו טיעון, גם יום רביעי אינו אפשרי, וכן גם שאר הימים.
>
> ביום רביעי בא המורה ובידו טופסי מבחן, והתלמידים מופתעים לחלוטין.

הפרדוקס הזה ״מריח״ כמובן ממעגליות. הארגומנט הוא מן הסוג של ״המורה יודע שאנחנו יודעים שהוא יודע...״ – נדמה שבסופו של דבר הידיעה תהיה חייבת להתייחס לעצמה. אבל איך, בדיוק?

קל יותר לחשוב על הפרדוקס בנוסח של שני ימים: המורה מוסר את הודעתו ביום רביעי, שפירושו שנותרו רק שני ימים, חמישי ושישי. יום שישי אינו בא בחשבון, ואם כן נותר רק יום חמישי, והמבחן כבר אינו מפתיע! כמובן, על אף הארגומנט הזה, בידי המורה נותרת עדיין הבחירה בין ימי חמישי ושישי, וההפתעה בעינה תעמוד.

אבל אם הלכנו כבר עד כאן, בואו נלך עוד צעד אחד. נגביל את המשחק ליום אחד! כלומר, המורה בא ומודיע: "מחר יהיה לכם מבחן פתע". גם זה מוביל לפרדוקס: אם אתה מאמין למורה, כי אז אתה יודע שיהיה מבחן פתע, אבל אז אין זה מבחן פתע, ולכן אינך יודע זאת, וחוזר חלילה! אפשר לכתוב את הנוסח הזה בפשטות. המורה אומר את המשפט הבא (נקרא לו מ'):

מ': מחר יהיה מבחן, ואתה אינך יודע משפט זה.

ההנחה שממנה יוצא הפרדוקס היא שאנחנו מאמינים (אין סיבה שלא להאמין) ברצינות כוונותיו של המורה. אם כן, הטענה "מחר יהיה מבחן" מונחת כנכונה. שאלת הנכונות מתייחסת עתה רק לחלקו השני של המשפט, "אינך יודע משפט זה".

עתה, אם אתה יודע את המשפט, כי אז הוא נכון (מה שיודעים נכון); אבל אם הוא נכון אז (על פי משמעותו) אינך יודע אותו. נובע מכך שאם אתה יודע את המשפט, אינך יודע אותו.

המסקנה משתי השורות האחרונות היא שאינך יכול לדעת את המשפט, כי הרי הנחת הידיעה מובילה לסתירה. כלומר (שוב, צריך לזכור את תוכנו של המשפט! הוא אומר שאינך יודע אותו) המשפט נכון. על כן אתה יודע את המשפט. שפירושו שהמשפט אינו נכון, וזוהי סתירה.

מרטין גרדנר, פופולריזטור ידוע של המדע, מחבר חידות מתמטיות וחובב פרדוקסים מושבע, כתב וריאציה על אותו נושא: בעל מודיע לאשתו שמחר יקנה לה שרשרת זהב, ושבכך יפתיע אותה. היא חושבת – אם כן הוא לא יעשה זאת, משום שאחרת לא יעמוד בהבטחתו. זו לא תהיה הפתעה. והנה, למחרת הוא מביא לה שרשרת זהב, והיא מופתעת. כמובן, אפשר היה להמשיך את הסיפור בנקודה שבה החליטה שלא יקנה לה: משהגיעה למסקנה שבעלה לא יקנה לה את שרשרת הזהב היא יכולה להסיק שהיא כבר לא יודעת שהוא יקנה את המתנה, ואם כן היא כבר דווקא כן תופתע אם יקנה, וכו'.

כבר פגשנו סיפור דומה, על אחיו של סמליאן, שהודיע לו שיסדר אותו. וכאמור, בהמשך נפגוש פרדוקס שבנוי בצורה דומה מאוד, "פרדוקס גדל". בפרדוקס גדל המשפט אינו "אתה אינך יודע משפט זה", אלא "אי אפשר להוכיח משפט זה". שני הפרדוקסים כמעט זהים, משום שה"ידיעה" שעליה מדברים בפרדוקס בחינת הפתע הופכת בשלב מסוים לידיעה על דרך ההוכחה: בשורה האחרונה מוסקת מן הטיעון הלוגי הטענה "אם כן, אנחנו יודעים את המשפט". מאותו רגע, מזוהה הידיעה עם "ניתנות להוכחה", והפרדוקס הופך לניסוח בלשון אחרת של פרדוקס גדל.

למעשה, אין זה חשוב כל כך לעקוב אחרי נפתולי הטיעונים הללו. מן הרגע שהפרדוקס, לפחות בנוסח היום האחד, לבש את הצורה "אינך יודע משפט זה", המעגליות בו שקופה למדי. הידיעה של המשפט והאובייקט שלו הפכו לאחד, שהיא תמצית המעגליות.

ומה בדבר הנוסח של שני ימים, או יותר? אינני רוצה להיכנס כאן לארגומנט הדן במקרה הזה, שנראה קצת יותר מדי כמו הוכחה מתמטית, אבל הוא דומה לגמרי. מה שחשוב הוא זה: המשפט טוען על אי ידיעתו, אם בדרך ישירה (כמו בנוסח של היום האחד), ואם בדרך עקיפה (בנוסח של יותר מיום אחד). כל ניסיון לברר אם המשפט ידוע או לא מוביל במקרה כזה למטלה מעגלית: הבדיקה משפיעה על תוצאתה. אם מתברר לך שאינך יודע, כי אז על פי תוכנו של המשפט יוצא שאתה יודע אותו, ולהפך.

אמרתי לך כבר מיליון פעמים לא להגזים!